

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Казанский национальный исследовательский университет
им. А.Н. Туполева – КАИ
Заочная школа математики и программирования**

**ВСТУПИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ
на 2020 – 2021 учебный год**

г. Казань, 2020

Заочная школа математики и программирования Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н.Туполева – КАИ (ЗШМП КНИТУ-КАИ) проводит набор учащихся 10-11 классов школ, лицеев, гимназий с целью дать возможность учащимся освоить и систематизировать знания по математике, физике и информатике сверх школьной программы, а также научиться решать олимпиадные задачи.

Методическое руководство осуществляют преподаватели Института компьютерных технологий и защиты информации и Физико-математического факультета.

Обучение в ЗШМП КНИТУ-КАИ бесплатное.

Приём проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по выбранным для изучения предметам.

Вступительное задание нужно выполнить в одной тетради на русском языке, сохраняя тот же порядок задач, что и в задании. Тетрадь нужно отсканировать (либо качественно сфотографировать) и загрузить в личном кабинете на сайте ЗШМП в разделе «Поступление» (ссылка для регистрации: <https://lk.kai.ru/zshmp/registration.php>) не позднее 15 ноября 2020 года. Информация о результатах проверки работ будет выслана на указанный при регистрации адрес электронной почты.

Поступивший в течение учебного года будет получать теоретический материал и задания по выбранным предметам для самостоятельного решения, затем в личном кабинете ему будут доступны рекомендуемые решения задач, а также результаты проверки работы.

Казанский национальный исследовательский университет

им. А.Н. Туполева – КАИ

Заочная школа математики и программирования

Тел. (843) 231-16-52, e-mail: zshmp@kai.ru

Наш сайт: zshmp.kai.ru

Задачи по информатике

1 (1 балл). Каждый из учеников класса получил отличные оценки по одному или нескольким из перечисленных предметов: математике, физике, литературе. Известно, что получили отличные оценки по математике - 15 учеников, по физике - 10 учеников, по литературе - 12 учеников, по математике, физике и литературе - 3 ученика, по математике и литературе - 8 учеников, по математике и физике – 5 учеников, по физике и литературе - 6 учеников. Какое количество учеников в классе?

2 (1 балл). В некоторой организации при генерации идентификатора пользователя можно использовать алфавит А, состоящий из заглавных букв латинского алфавита (латинский алфавит 26 символов) и цифр от 0 до 9. Длина идентификатора должна быть 4 символа, причем первые два символа буквы, а последние два – цифры, в идентификаторе не должно быть совпадающих символов. Сколько различных идентификаторов можно сгенерировать?

3 (2 балла). В некоторой стране решили сделать новый флаг, состоящий из трех горизонтальных полос с использованием полос красного, синего, зеленого и черного цветов. Сколько флагов можно получить, если применяются полосы разных цветов?

4 (1 балл). Сколько единиц в двоичной записи десятичного числа 8195?

5 (1 балл). Сколько нулей в двоичной записи шестнадцатеричного числа $37EF,9A_{16}$. Считать только значащие нули, т.е. те нули, удаление которых приведет к изменению значения числа.

6 (2 балла). Сколько трехразрядных неотрицательных чисел в троичной системе счисления?

7 (2 балла). Найти наименьшее основание системы счисления x , в которой справедливо равенство $145_x = 442_y$.

8 (1 балл). Рассчитать объем видеопамати (в мегабайтах) необходимой для хранения 2 страниц изображения, имеющего 65536 оттенков цвета каждого пикселя, если на экране должно быть не менее 1024 строки по 1024 пикселя.

9 (1 балл). В школе кто-то из учеников разбил стекло. Директор вызвал Мишу, Петю, Никиту и Семена. На вопрос, кто же разбил стекло директор получил следующие ответы:

Миша указал на Петю, Петя – на Семена, но Семен утверждал, что это не он, и Никита тоже утверждал, что это не он.

Но стало известно, что правду говорит только один из учеников. Кто же разбил стекло?

10 (2 балла). На рынке работают три конкурирующие компании А, В и С. Финансовые аналитики высказали два предположения:

- прибыль получит только одна из компаний: или компания А, или компания С;

- если компания В получит прибыль, то компания С тоже получит прибыль.

По завершению года оказалось, что первое предположение подтвердилось, а второе - нет.

Какие компании получили прибыль?

11 (2 балла). Определите количество точек с целочисленными координатами, удовлетворяющее следующим условиям

$$X^2 - 4X + Y^2 \leq 0 \text{ и } |Y| \leq 1$$

12 (2 балла). Дан фрагмент электронной таблицы:

	А	В
1		
2	8	=A1*A2+B\$1
3	3	

Содержимое ячейки В2 скопировали в ячейку В3. После этого фрагмент электронной таблицы имеет вид:

	А	В
1		
2	8	194
3	3	26

Определите значение ячейки А1.

13 (5 баллов). Числа Фибоначчи (F_i) определяются по формулам

$F_0 = F_1 = 1$; $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ при $i = 2, 3, \dots$ (каждое очередное число равно сумме двух предыдущих).

Требуется определить сумму всех чисел Фибоначчи, которые не превосходят заданного натурального числа M ($M > 1$).

Напишите программу на языке Си или на любом другом языке высокого уровня, например Паскаль, или составьте алгоритм решения задачи в виде схемы.

Входные данные содержат одно число - значение величины M .

Результат должен содержать одно число – искомую сумму.

Пример входных данных:

10

Выходные данные для этого примера:

20

14 (5 баллов). Задано количество чисел N , за которым следует последовательность из N целых чисел X_1, X_2, \dots, X_N . Определить, сколько раз в последовательности встречается максимальное число.

Напишите программу на языке Си или на любом другом языке высокого уровня, например Паскаль, или составьте алгоритм решения задачи в виде схемы. Массивы не использовать.

Входные данные содержат число N и N целых чисел.

Результат должен содержать одно число – искомое количество.

Пример входных данных

7 3 1 5 -2 4 5 0

Выходные данные для этого примера:

2

15 (5 баллов). Даны три натуральных числа A, B и C .

Требуется определить количество натуральных чисел на отрезке от A до B , включая границы, сумма цифр которых равна числу C .

Числа A и B не превосходят 10000, число A меньше числа B .

Напишите программу на языке Си или на любом другом языке высокого уровня, например Паскаль, или составьте алгоритм решения задачи в виде схемы.

Входные данные содержат три числа, соответственно значения величин A, B и C .

Результат должен содержать одно число – искомое количество.

Пример входных данных:

25 70 7

Выходные данные для этого примера:

6

Задачи по математике

1 (1 балл). Вычислить $\left(\left(\frac{7}{16} \right)^2 \cdot 56^4 \cdot \left(\frac{1}{49} \right)^2 - 160 \right) : \left(\frac{1}{13} \right)^{-1}$.

2 (1 балл). Вычислить $(\sqrt{65} + \sqrt{14} - \sqrt{91} - \sqrt{10}) \cdot (\sqrt{65} + \sqrt{14} + \sqrt{91} + \sqrt{10})$.

3 (2 балла). Решить неравенство $|7 + x| \geq 2$.

4 (2 балла). Определить, при каких значениях параметра a уравнение $\frac{a}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$ не имеет корней?

5 (2 балла). Известно, что пустой бассейн заполняется только первой трубой за 3 часа, а только второй - за 4 часа. Полностью заполненный бассейн выливается через третью трубу за 2 часа. За сколько часов заполнится изначально пустой бассейн, если открыть все три трубы одновременно?

6 (2 балла). На сколько процентов уменьшится дробь, если ее числитель уменьшить на 20%, а знаменатель увеличить на 60%?

7 (2 балла). Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 35 км, вышла моторная лодка. Через 30 минут из В в А отплыл плот и встретил лодку через 1,5 часа после своего отплытия. Найти собственную скорость лодки, если скорость течения реки 2 км/ч.

8 (3 балла). В прямоугольном треугольнике длины медиан острых углов равны 11 и 7. Вычислить квадрат гипотенузы.

9 (2 балла). Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0 и 1, если цифры в числе могут повторяться? Перечислите эти числа.

10 (3 балла). Смешали 54% и 61% растворы кислоты и добавили 10 л чистой воды, получили 46% раствор кислоты. Если бы вместо 10 л воды добавили 10 л 50% раствора той же кислоты, то получили бы 56% раствор кислоты. Сколько литров 54% раствора использовали для получения смеси?

11 (2 балла). Упростить выражение

$$\frac{\sin\left(\beta - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(2\pi - \beta) + \operatorname{tg}(\pi - \beta)}{\operatorname{ctg}\left(\beta - \frac{3\pi}{2}\right) + 2\cos\beta}, \text{ где } \beta - \text{острый угол.}$$

12 (3 балла). Решить уравнение $\frac{1-9x}{x^2+2x-3} + \frac{3x-1}{x-1} = \frac{2x}{x+3}$.

13 (2 балла). Упростить выражение $\frac{m^2 - 2mn - 5m + 10n}{3mn - m^2 + 5m - 15n}$ и

вычислить его значение, если $\frac{m}{n} = 4$.

14 (3 балла). В окружности вписанный угол, равный 35° , опирается на дугу AB . Площадь сектора с дугой AB равна 7π . Найти радиус окружности.

15 (4 балла).

1) (2 балла) Доказать, что в произвольном треугольнике ABC любая его медиана делит треугольник ABC на два равновеликих треугольника.

2) (2 балла) Доказать, что в произвольном треугольнике ABC любая все три его медианы делит треугольник ABC на шесть равновеликих треугольников.

Задачи по физике

1 (2 балла). Вычислить среднюю скорость велосипедиста, если первую четверть времени он двигался со скоростью 10 м/с, оставшееся время – со скоростью 5 м/с.

2 (2 балла). Воду объемом $V = 15$ л налили в цилиндрическое ведро диаметром $d = 30$ см. Определить давление p воды, оказываемое на стенку ведра на высоте $h = 10$ см от дна? Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³.

3 (2 балла). Брошенный в воду железный полый шар полностью погрузился в нее. Определить вес шара, если объем его внутренней полости $V_n = 40$ см³. Плотность железа $\rho_{жс} = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³.

4 (3 балла). В калориметр из латуни налили 0,5 кг воды. Через некоторое время установилась температура 15⁰С. Масса калориметра 0,3 кг. Затем в воду опустили 0,7 кг серебра при 87⁰С. Вода в калориметре нагрелась до 20⁰С. Определить удельную теплоемкость серебра.

Удельная теплоемкость латуни 380 Дж/(кг·⁰С), воды - 4200 Дж/(кг·⁰С).

5 (2 балла). Определить количество теплоты, необходимое плавления льда массой $m = 5$ кг, взятого при температуре $t_0 = -10^0$ С, нагревания полученной воды до кипения и выпаривания.

$c_l = 2,1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·⁰С), $c_e = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·⁰С), $\lambda_l = 340 \cdot 10^3$ Дж/(кг·⁰С), $L_e = 2260 \cdot 10^3$ Дж/(кг·⁰С).

6 (2 балла). Крейсер плывет на запад со скоростью $v_{кр} = 50$ км/ч. Капитан на крейсере видит подвижную лодку и определяет, что она движется на юго-восток со скоростью $v_{л} = 20$ км/ч. Какова истинная скорость v лодки и в каком направлении она плывет?

7 (2 балла). Камень массой $m = 300$ г бросили с башни горизонтально с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Высота башни $h = 30$ м. Найти потенциальную E_p и кинетическую E_k энергии камня спустя время $t = 1$ с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

8 (3 балла). Какова толщина серебряного покрытия пластинки площадью 2 см², если оно содержит серебро в количестве 0,002 моль. Плотность серебра равна $1,05 \cdot 10^4$ кг/м³. Молярная масса серебра $M = 0,108$ кг/моль.

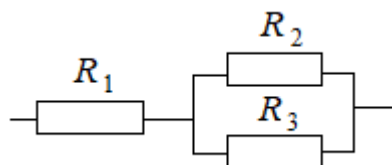
9 (2 балла). Автомашина движется со скоростью $v = 72$ км/ч по вогнутому мосту. Её масса $m = 2500$ кг. Радиус кривизны моста $R = 100$ м. Определить, с какой силой F давит автомашина на мост, проезжая через его середину.

10 (2 балла). Найти смещение шарика от положения равновесия через время $t = 0,5$ с после начала колебаний. Амплитуда синусоидальных гармонических колебаний шарика $A = 25$ мм, период $T = 2$ с.

11 (2 балла). Определить расстояние от берега до парохода, проходящего по озеру, если волна от парохода дошла до берега через время $t = 0,5$ мин. Расстояние между двумя соседними гребнями волны $\lambda = 1,5$ м, а время между двумя последовательными ударами о берег – $T = 1$ с.

12 (3 балла). Уличный фонарь подвешен на двух одинаковых тросах, угол между которыми $\alpha = 120^\circ$. Масса фонаря $m = 10$ кг. Найти натяжение T тросов.

13 (2 балла). Рассчитать общее сопротивление участка электрической цепи. Известно, что $R_1 = 15$ Ом, $R_2 = 5$ Ом $R_3 = 10$ Ом.



14 (2 балла). Однородная тонкая пластинка имеет форму круга радиусом R , в котором вырезано отверстие вдвое меньшего радиуса, касающееся края пластинки. Где находится центр масс пластинки?

15 (2 балла). Пуля массой $m = 8$ г, двигаясь со скоростью $v = 500$ м/с, попадает в деревянную стену и проникает в нее на глубину $s = 10$ см. Определить среднюю силу сопротивления F_c движению пули.